

Lógica Proposicional – Parte I

Raquel de Souza Francisco Bravo

[e-mail: raquel@ic.uff.br](mailto:raquel@ic.uff.br)

11 de outubro de 2016

Lógica Matemática – Cálculo Proposicional

Uma aventura de Alice

Alice, ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. O leão e o unicórnio eram duas estranhas criaturas que frequentavam a floresta. O leão mentia às segundas, terças e quartas, e falava a verdade nos outros dias da semana. O unicórnio mentia às quintas, sextas e sábados, mas falava a verdade nos outros dias da semana.

Problema 1

Um dia Alice encontrou o leão e o unicórnio descansando a sombra de uma árvore, eles disseram:

Leão: “Ontem, foi um dos meus dias de mentir.”

Unicórnio: “Ontem, foi um dos meus dias de mentir.”

A partir destas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

Problema 1

Um dia Alice encontrou o leão e o unicórnio descansando a sombra de uma árvore, eles disseram:

Leão: “Ontem, foi um dos meus dias de mentir.”

Unicórnio: “Ontem, foi um dos meus dias de mentir.”

A partir destas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

Quinta-feira

Problema 2

Em outra ocasião Alice encontrou o leão sozinho. Ele fez as seguintes afirmações:

1. Eu menti ontem.
2. Eu mentirei daqui a três dias.

A partir destas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

Problema 2

Em outra ocasião Alice encontrou o leão sozinho. Ele fez as seguintes afirmações:

1. Eu menti ontem.
2. Eu mentirei daqui a três dias.

A partir destas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

Segunda-feira

Problema 3

Em qual dia da semana é possível o leão fazer as seguintes afirmações:

1. Eu não menti ontem.
2. Eu mentirei amanhã.

Problema 3

Em qual dia da semana é possível o leão fazer as seguintes afirmações:

1. Eu não menti ontem.
2. Eu mentirei amanhã.

Quarta-feira ou Domingo

Lógica Matemática – Cálculo Proposicional

- **PROPOSIÇÃO**

É uma sentença declarativa afirmativa que pode ser verdadeira ou falsa, mas não as duas afirmações ao mesmo tempo.

Ex.: Quais dessas são proposições?

- A lua é quadrada
- A neve é branca.
- João

Lógica Matemática – Cálculo Proposicional

- **PROPOSIÇÃO**

É uma sentença declarativa afirmativa que pode ser verdadeira ou falsa, mas não as duas afirmações ao mesmo tempo.

Ex.: Quais dessas são proposições?

- A lua é quadrada
- A neve é branca.
- João (**não é uma proposição**)

Lógica Matemática – Cálculo Proposicional

CONNECTIVOS LÓGICOS: São partículas que permitem construir sentenças complexas a partir de outras mais simples:

\wedge : e

\vee : ou

\rightarrow : se ... então

\leftrightarrow : se e somente se

\neg : não

Lógica Matemática – Cálculo Proposicional

- A partir das sentenças (**proposições atômicas**):
 - ✓ Está chovendo
 - ✓ A rua está molhada
- Podemos construir as sentenças (**proposições compostas**):
 - ✓ Não está chovendo
 - ✓ Se está chovendo, então a rua está molhada

Sintaxe: define a estrutura das sentenças

- **Símbolos**

- ✓ letras latinas minúsculas p, q, r, s, \dots para indicar as proposições (fórmulas atômicas).
- ✓ conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ (da maior para a menor precedência)

- **Fórmulas**

- ✓ Se A e B são fórmulas, então também são fórmulas:
 - $\neg A$ (negação)
 - $A \wedge B$ (conjunção)
 - $A \vee B$ (disjunção)
 - $A \rightarrow B$ (implicação)

Lógica Proposicional

Exemplos:

-A lua é quadrada e a neve é branca:

Lógica Proposicional

Exemplos:

-A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$

Lógica Proposicional

Exemplos:

-A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$

-A lua é quadrada ou a neve é branca. :

Lógica Proposicional

Exemplos:

-A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$

-A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$

Lógica Proposicional

Exemplos:

- A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$
- A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$
- Se a lua é quadrada então a neve é branca. :
(p é o antecedente e q o conseqüente)

Lógica Proposicional

Exemplos:

- A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$
- A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$
- Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$
(p é o antecedente e q o conseqüente)

Lógica Proposicional

Exemplos:

- A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$
- A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$
- Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$
(p é o antecedente e q o conseqüente)
- A lua é quadrada se e somente se a neve é branca. :

Lógica Proposicional

Exemplos:

- A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$
- A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$
- Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$
(p é o antecedente e q o conseqüente)
- A lua é quadrada se e somente se a neve é branca. :

$$p \leftrightarrow q$$

Lógica Proposicional

Exemplos:

- A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$
- A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$
- Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$
(p é o antecedente e q o conseqüente)
- A lua é quadrada se e somente se a neve é branca. :
 $p \leftrightarrow q$
- A lua não é quadrada. :

Lógica Proposicional

Exemplos:

- A lua é quadrada e a neve é branca: $p \wedge q$
- A lua é quadrada ou a neve é branca. : $p \vee q$
- Se a lua é quadrada então a neve é branca. : $p \rightarrow q$
(p é o antecedente e q o conseqüente)
- A lua é quadrada se e somente se a neve é branca. :
 $p \leftrightarrow q$
- A lua não é quadrada. : $\neg p$

Lógica Proposicional – Fórmulas (fbf)

1. Toda fórmula atômica é uma fórmula.

2. Se A e B são fórmulas então

$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ e $(\neg A)$ também são fórmulas.

- São fórmulas bem-formuladas (fbf) apenas as obtidas por 1 e 2 .

Lógica Proposicional – Fórmulas (fbf)

Ex: 1) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ é um fbf? **SIM**

2) $A)) B \wedge \wedge C D \rightarrow$ é um fbf? **NÃO**

Para reduzir o número de parênteses necessários em uma fbf, vamos estipular uma ordem de aplicação dos conectivos lógicos. A **ordem de precedência** é:

- 1) Para conectivos dentro de vários parênteses, efetua-se primeiro as expressões dentro dos parênteses mais internos;
- 2) \neg
- 3) \wedge, \vee
- 4) \rightarrow
- 5) \leftrightarrow

Lógica Proposicional – Fórmulas (fbf)

Em uma fbf com diversos conectivos, o último a ser aplicado é o conectivo principal.

Ex: 1) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Conectivo Principal: \wedge

2) $((A \wedge B) \vee C) \rightarrow (B \vee \neg C)$

Conectivo Principal: \rightarrow

3) $(A \wedge B) \vee (C \rightarrow (B \vee \neg C))$

Conectivo Principal: \vee

Lógica Proposicional

- A lógica clássica é governada por dois princípios que podem ser formulados como segue:

1- Princípio da Não Contradição

2- Princípio do 3º. Excluído

Lógica Proposicional

- A lógica clássica é governada por dois princípios que podem ser formulados como segue:

Uma proposição não pode assumir valor verdadeiro e falso ao mesmo tempo

2- Princípio do 3º. Excluído

Lógica Proposicional

- A lógica clássica é governada por dois princípios que podem ser formulados como segue:

Uma proposição não pode assumir valor verdadeiro e falso ao mesmo tempo

Uma proposição pode assumir apenas dois valores: verdadeiro ou falso, excluindo um 3º valor.

Lógica Matemática – Tabela Verdade

- Com base nesses princípios, as proposições simples ou são verdadeiras ou são falsas - sendo mutuamente exclusivos os dois casos; por este motivos, dizemos que a lógica clássica é bivalente.
- Para determinarmos o valor (verdade ou falsidade) das proposições compostas (moleculares), conhecidos os valores das proposições simples (atômicas) que as compõem, usaremos tabelas-verdade .

Lógica Matemática – Tabela Verdade

NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE

Cada proposição simples (atômica) tem dois valores V ou F, que se excluem.

n fórmulas atômicas distintas



número de linhas da tabela verdade é 2^n

Assim, para duas proposições são $2^2 = 4$ linhas; para 3 proposições são $2^3 = 8$; etc.

Lógica Matemática – Tabela Verdade

Tabela Verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível.

\neg : negação

p	$\neg p$
V	F
F	V

Lógica Matemática – Tabela Verdade

Tabela Verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível.

\wedge : conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Lógica Matemática – Tabela Verdade

Tabela Verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível.

\vee : disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Lógica Matemática – Tabela Verdade

Tabela Verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível.

→: implicação

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Lógica Matemática – Tabela Verdade

Tabela Verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível.

\leftrightarrow : bicondicional

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$q \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Lógica Matemática – Tabela Verdade

Tabela Verdade: avalia uma fórmula em cada interpretação possível.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Lógica Proposicional de 1ª ordem

- **Tautologia**

É uma proposição que é sempre verdadeira independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.

- **Contradição**

É uma proposição que é sempre falsa independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.

Exemplos

Tautologia

- $p \vee \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg(p \wedge q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Exemplos

Contradição

- $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Lógica Proposicional de 1ª ordem

- Equivalência Lógica (\Leftrightarrow)

A é **equivalente logicamente** a B quando a troca da relação de equivalência pelo conectivo (\Leftrightarrow) ocasionar uma tautologia.

- Implicação Lógica (\Rightarrow)

A **implica logicamente** em B se B for verdadeiro toda vez que A for verdadeiro, ou equivalentemente, a troca de (\Rightarrow) por (\rightarrow) gera uma tautologia.

Propriedades da Lógica Proposicional

- $\neg (\neg p) \Leftrightarrow p$ (dupla negação)
- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutativa)
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (comutativa)
- $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (associativa)
- $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (associativa)
- $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (distributiva)
- $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (distributiva)

Propriedades da Lógica Proposicional

- $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (idempotente)
- $p \vee p \Leftrightarrow p$ (idempotente)
- $p \wedge T \Leftrightarrow p$ (identidade)
- $p \vee F \Leftrightarrow p$ (identidade)

Propriedades da Lógica Proposicional

Lei de Morgan

- $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Absorção

- $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
- $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Propriedades da Lógica Proposicional

Condicional

- $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Bicondicional

- $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Contrapositiva

- $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Exercícios

1. Construir as tabelas-verdade das seguintes proposições:

i. $\neg (p \vee \neg q)$

ii. $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow q \rightarrow p$

iii. $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\neg p \leftrightarrow q \vee \neg r)$

iv. $\neg p \wedge r \rightarrow q \vee \neg p$

2. Mostrar que as seguintes proposições são tautológicas

i. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$

ii. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$

iii. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$

Exercícios

iv. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$

3. Mostrar que as seguintes proposições são contraválidas, isto é, uma contradição:

i. $p \leftrightarrow \neg p$

ii. $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$

iii. $\neg p \wedge (p \wedge \neg q)$

4. Sabendo que os valores lógicos das proposições p e q , são respectivamente F e V . Determinar o valor lógico (V ou F) da proposição:

$$(p \wedge (\neg q \rightarrow p)) \wedge \neg((p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow q \vee \neg p)$$

Exercícios

5. Demonstrar as propriedades comutativa e associativa da bicondicional:
- i. $p \leftrightarrow q \iff q \leftrightarrow p$
 - ii. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \iff p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
6. Demonstrar por tabelas-verdades as equivalências:
- i. $p \rightarrow q \wedge r \iff (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
 - ii. $p \rightarrow q \vee r \iff (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
7. Dar a negação em linguagem corrente da proposição:
“ Rosas são vermelhas e violetas são azuis. ”

Exercícios

8. Demonstrar as seguintes regras de De Morgan para três componentes:

i. $\neg(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

ii. $\neg(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$